

УДК 627.324.2/3:532.72:532.546

**М. С. Філатов**, старший викладач,**Р. В. Ханенко**, аспірант

Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

## **ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОЧИЩЕННЯ ҐРУНТОВОГО СЕРЕДОВИЩА ВІД РАДІОНУКЛІДІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ФІЛЬТРІВ-ВЛОВЛЮВАЧІВ МОДИФІКОВАНИМ МЕТОДОМ РОЗКЛАДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В РЯД ТЕЙЛОРА**

Проведено математичне моделювання очищення ґрунтового середовища від радіонуклідів в складених багатозв'язних областях із використанням фільтрів-вловлювачів модифікованим методом розкладу диференціального оператора в ряд Тейлора.

**Ключові слова:** *математична модель, очищення ґрунту, радіонукліди, ряд Тейлора.*

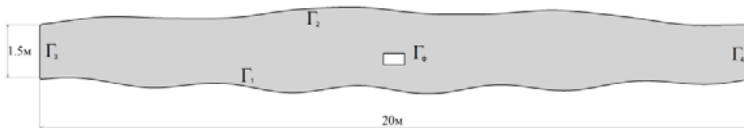
### **1. Вступ**

В наш час, у зв'язку із зростанням техногенного впливу на оточуюче середовище (захоронення радіоактивних відходів, викиди радіоактивних речовин, аварії на АЕС і т.п.), проблема очищення ґрунтів від забруднення їх радіонуклідами є актуальною. Тому особливої уваги заслуговує прогнозування міграції радіонуклідів при фільтрації підземних вод та прогнозування ступеня очищення ґрунтових середовищ від радіонуклідів. Цим питанням присвячені роботи [1—6].

У роботі для вирішення вищезгаданих задач розробляється метод, який використовує розклад диференціальних операторів рівнянь крайової задачі в ряд Тейлора.

### **2. Постановка задачі**

Розглянемо задачу очищення ґрунтового середовища від радіонуклідів із використанням фільтрів-вловлювачів у двовимірній постановці при їх міграції шляхом переносу встановленим (стаціонарним) фільтраційним потоком та під впливом конвективної дифузії до системи фільтрів-вловлювачів (рис. 1).



**Рис. 1.** Фрагмент області міграції радіонуклідів до фільтра-вловлювача

Необхідно розрахувати концентрацію радіонуклідів у кожній точці області, що розглядається, та в кожен момент часу як у рухомому поровому розчині, так і у зв'язаній з скелетом ґрунту воді та знайти, за який час концентрація певної підобласті з області фільтрації не перевищуватиме гранично допустимих значень.

### 3. Математична модель

Математичну модель поставленої задачі, в якій фільтруючий розчин з радіонуклідів-мігрантів моделюється сольовим розчином (слабким електролітом), можна описати наступною крайовою задачею на множині  $\Omega$ , на проміжку часу  $t \in (0; T]$ :

$$D_1 \left( \frac{\partial^2 c^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(1)}}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x} - V_y \frac{\partial c^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 c^{(1)} + \gamma_2 c^{(2)} = \sigma \frac{\partial c^{(1)}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$D_2 \left( \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial y^2} \right) + \gamma_1 c^{(1)} - \gamma_2 c^{(2)} = \frac{\partial c^{(2)}}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $c^{(1)} = c^{(1)}(x, y, t)$ ,  $c^{(2)} = c^{(2)}(x, y, t)$  — концентрації радіонуклідів відповідно в фільтраційному потоці і у зв'язаній із скелетом ґрунту воді,  $D_1$ ,  $D_2$  — коефіцієнти конвективної і молекулярної дифузії радіонуклідів відповідно,  $\sigma$  — пористість ґрунту,  $\gamma_1, \gamma_2$  — коефіцієнти масообміну,  $\vec{V} \equiv (V_x, V_y)$  — вектор швидкості фільтраційного потоку, компоненти якого задовольняють рівняння фільтрації підземних вод

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} = 0, \quad (3)$$

де  $h$  — п'єзометричний напір,  $k$  — коефіцієнт фільтрації.

Нехай у початковий момент часу відомо розподіли концентрацій  $c^{(1)}$  та  $c^{(2)}$

$$c^{(1)}(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{(1)}, c^{(2)}(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{(2)}.$$

Задані викиди радіонуклідів на поверхню ґрунту

$$c^{(1)} \Big|_{\Gamma_2}(x, y, t) = \tilde{C}_1^{(1)}, c^{(2)} \Big|_{\Gamma_2}(x, y, t) = \tilde{C}_1^{(2)}. \quad (4)$$

На нижній границі виділеного ґрунтового середовища задані умови непроникності

$$\left. \frac{\partial c^{(1)}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_1} = 0, \left. \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad (5)$$

на бічних сторонах — умови неперетікання радіонуклідів

$$\left. \frac{\partial c^{(1)}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0, \left. \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0 \quad (6)$$

та на фільтрі — умови швидкого виносу радіонуклідів фільтраційним потоком і поглинання їх фільтром

$$\left. \frac{\partial c^{(1)}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_\Phi} = 0, \left. \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_\Phi} = 0. \quad (7)$$

Для п'єзометричного напору відомі значення на фільтрі, на поверхні ґрунту і задаються умови неперетікання

$$h|_{\Gamma_2} = H_1, h|_{\Gamma_\Phi} = H_2, \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0. \quad (8)$$

#### 4. Розв'язок задачі методом розкладу диференціального оператора в ряд Тейлора

Для чисельного розв'язання задачі (1)—(8) проведемо дискретизацію області  $\bar{\Omega}$  на вузли  $(x_i, y_i) \in \bar{\Omega}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Розіб'ємо також проміжок часу  $(0; T]$  часовим вузлами  $t_k \in (0; T]$  з кроком  $\tau$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Введемо позначення  $c^{(1)}(x_i, y_i, t_k) \equiv c_{i,k}^{(1)}$ ,  $c^{(2)}(x_i, y_i, t_k) \equiv c_{i,k}^{(2)}$ ,  $h(x_i, y_i) \equiv h_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

На основі (3) маємо

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (9)$$

Використавши розклад функції в ряд Тейлора в околі кожного вузла розбиття, отримаємо

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \sum_{j \in N_i} a_j^{(i)} h_j = 0, (x_i, y_i) \in \Omega. \quad (10)$$

Тут:  $N_i$  — множина сусідніх вузлів до  $i$ -го вузла. Коефіцієнти  $a_j^{(i)}$  отримуються із системи з шести рівнянь, які являють собою розклади  $h$  в ряд Тейлора в околі  $i$ -го вузла по відношенню до його сусідніх вузлів.

Аналогічно, для рівнянь (8) отримаємо

$$\begin{aligned} h_i &= H_1, (x_i, y_i) \in \Gamma_2, i = \overline{1, N}, \\ h_i &= H_2, (x_i, y_i) \in \Gamma_\Phi, i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial n} = \sum_{j \in N_i} a_j^{(i)} h_j = 0, (x_i, y_i) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, i = \overline{1, N}.$$

Таким чином, для знаходження  $h_i$  необхідно розв'язати систему рівнянь (10)—(11).

Розглянемо процес міграції радіонуклідів (1)—(8) в момент часу  $t = t_k$ . Замінімо похідну по часу в (1), (2) різницеvim аналогом

$$\frac{\partial^2 c_{i,k}^{(1)}}{\partial t} \approx \frac{c_{i,k}^{(1)} - c_{i,k-1}^{(1)}}{\tau_k}, \quad \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(2)}}{\partial t} \approx \frac{c_{i,k}^{(2)} - c_{i,k-1}^{(2)}}{\tau_k}, \quad \tau_k = t_k - t_{k-1}, k = \overline{1, K}.$$

Тоді для кожного значення  $i$  запишемо (1), (2) у вигляді

$$\begin{aligned} D_1 \left( \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(1)}}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c_{i,k}^{(1)}}{\partial x} - V_y \frac{\partial c_{i,k}^{(1)}}{\partial y} - \\ - \gamma_1 c_{i,k}^{(1)} + \gamma_2 c_{i,k}^{(2)} = \sigma \frac{c_{i,k}^{(2)} - c_{i,k-1}^{(2)}}{\tau_k}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$D_2 \left( \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(2)}}{\partial y^2} \right) + \gamma_1 c_{i,k}^{(1)} - \gamma_2 c_{i,k}^{(2)} = \frac{c_{i,k}^{(2)} - c_{i,k-1}^{(2)}}{\tau_k}. \quad (13)$$

У рівнянні (12) використовується значення  $c_{i,k}^{(2)}$ , а в рівнянні (13) —  $c_{i,k}^{(1)}$  із поточного кроку по часу. Враховуючи, що в реальних умовах подібні процеси будуть пробігати повільно, замінімо ці значення на значення з попереднього, вже обрахованого кроку. Таким чином, після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} D_1 \left( \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(2)}}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c_{i,k}^{(1)}}{\partial x} - V_y \frac{\partial c_{i,k}^{(1)}}{\partial y} + \left( -\gamma_1 - \frac{\sigma}{\tau_k} \right) c_{i,k}^{(1)} = \\ = \sum_{j \in N_i} a_j^{(1)(i)} c_{j,k} = -\gamma_2 c_{i,k}^{(2)} - \sigma \frac{c_{i,k-1}^{(2)}}{\tau_k}, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $a_j^{(1)(i)}$  — параметри апроксимації диференціального оператора від  $c_{i,k}^{(1)}$  у  $i$ -му вузлі;

$$D_2 \left( \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_{i,k}^{(2)}}{\partial y^2} \right) + \left( -\gamma_2 - \frac{1}{\tau_k} \right) c_{i,k}^{(2)} =$$

$$= \sum_{j \in N_i} \left( a_j^{(2)(i)} c_{j,k}^{(2)} \right) = -\gamma_1 c_{i,k}^{(1)} - \frac{c_{i,k-1}^{(2)}}{\tau_k},$$

де  $a_j^{(2)(i)}$  — параметри апроксимації диференціального оператора від  $c_{i,k}^{(2)}$  у  $i$ -му вузлі.

Аналогічно, отримуємо рівняння внаслідок апроксимації граничних умов

$$\frac{\partial c_{i,k}^{(1)}}{\partial \vec{n}} = \sum_{j \in N_i} \left( a_j^{(1)(i)} c_{j,k}^{(1)} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial c_{i,k}^{(2)}}{\partial \vec{n}} = \sum_{j \in N_i} \left( a_j^{(2)(i)} c_{j,k}^{(2)} \right) = 0.$$

Отже, знаходження концентрації у вузлах  $i$  для кожного моменту часу зводиться до розв'язання 2-х СЛАР (14)–(16). Враховуючи те, що величини  $c^{(1)}$  і  $c^{(2)}$  зв'язані, то на кожному із кроків по часу в рівняннях (14), (15), обчислення ведуться до тих пір, поки

$$\left| c_{i,k}^{(1)(s+1)} - c_{i,k}^{(1)(s)} \right| < \varepsilon, \text{ та } \left| c_{i,k}^{(2)(s+1)} - c_{i,k}^{(2)(s)} \right| < \varepsilon, \quad (17)$$

де  $s$  — крок апроксимації,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $\varepsilon$  — достатньо мала величина, за допомогою якої задається точність обчислень.

### 5. Програмна реалізація та результати обчислювальних експериментів

Програмна реалізація розв'язання даної задачі проведена в середовищі Microsoft Visual Studio 2008 із використанням сучасної мови програмування C#. Розбиття області проводилося на основі алгоритму триангуляції [7]. Обрахунки були виконані для кількості вузлів  $N = 10647$ .

В якості конкретного прикладу спрогнозуємо зміну концентрації радіонуклідів з такими вхідними даними:  $H_1 = 1$  м;  $H_2 = 0$  м;  $D_1 = 0,01$  м<sup>2</sup>/добу;  $D_2 = 0,01$  м<sup>2</sup>/добу;  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,0065$ ;  $k = 0,1$  м/добу;  $\sigma = 0,2$ ;  $\tilde{C}_0^{(1)} = 0$ ;  $\tilde{C}_0^{(2)} = 0$ ;  $\tilde{C}_1^{(1)} = 26t^2 e^{-0,3t}$ ;  $\tilde{C}_1^{(2)} = t^3 e^{-0,3t}$ ; фільтр знаходиться на глибині 0,8 м,  $0,6 \text{ м} \times 0,3 \text{ м}$  — розміри фільтра.

Нижче наведені графіки отриманих результатів.

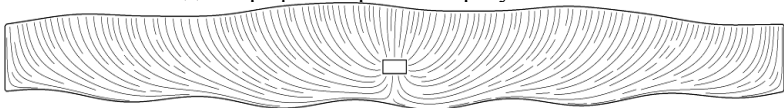


Рис. 2. Ізолінії міграції радіонуклідів до фільтра

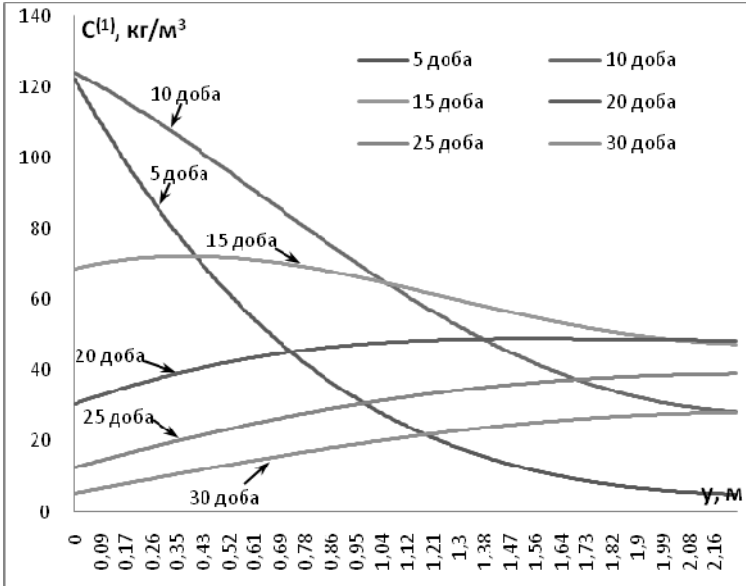


Рис. 3. Графіки розподілу концентрації  $c^{(1)}$  по глибині ґрунтового масиву

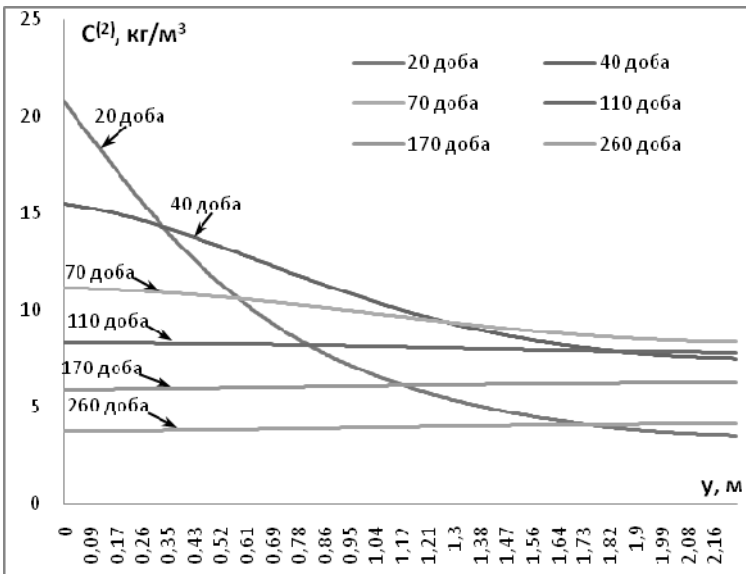


Рис. 4. Графіки розподілу концентрації  $c^{(2)}$  по глибині ґрунтового масиву

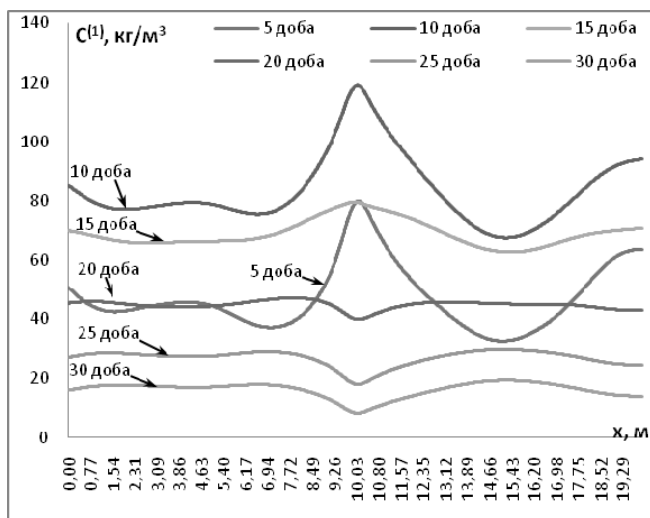


Рис. 5. Графік розподілу концентрації  $c^{(1)}$  поздовж ґрунтового масиву на глибині  $y = 0,4$  м.

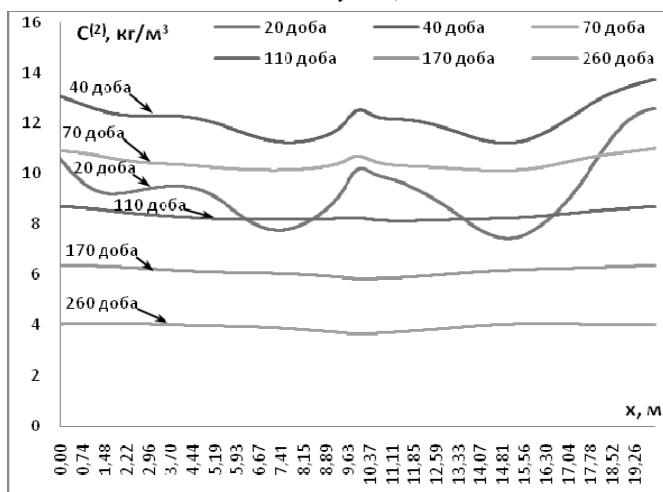


Рис. 6. Графік розподілу концентрації  $c^{(2)}$  поздовж ґрунтового масиву на глибині  $y = 0,4$  м.

Як видно із графіків рис. 3—6, розподіли концентрацій  $c^{(1)}$  та  $c^{(2)}$  з часом по глибині шару ґрунту суттєво відрізняються. Концентрація радіонуклідів у рухомій рідині значно перевищує концентрацію радіонуклідів в рідині, зв'язаній із скелетом ґрунту. Швидкості очищення від радіо-

нуклідів рухомої рідини та рідини, зв'язаної із скелетом ґрунту також відрізняються. Якщо концентрація радіонуклідів у рухомій поровій рідині на глибині 0.4 м вже на 25-ту добу після викиду становить менше 30 % від максимального її значення, то концентрація в рідині, зв'язаній із скелетом ґрунту становитиме менше 30 % від її максимального значення аж через 260 діб. Зважаючи на те, що концентрація радіонуклідів в рідині, зв'язаній із скелетом ґрунту значно менша за концентрацію радіонуклідів в рухомій поровій рідині, то очищення ґрунту до рівня забруднення 30 % від максимального значення забруднення відбудеться вже після 30-ї доби.

**Висновки.** Таким чином, в роботі сформульовано постановку та розроблено математичну модель процесу очищення ґрунтового середовища від радіонуклідів. З використанням розкладу диференціальних операторів рівнянь задачі в ряд Тейлора, для даної математичної моделі побудовано різницеву схему, проведено обчислювальні експерименти та проаналізовані їх результати.

#### Список використаних джерел:

1. Власюк А. П. Числове моделювання однієї задачі про утилізацію радіонуклідів / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тез. доп. Міжнародної школи-семинару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». — Мелітополь, 2005. — С. 111—113.
2. Власюк А. П. Числове моделювання міграції радіонуклідів при горизонтальній фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тез. доп. Міжнародної школи-семинару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». — Східниця, 2006. — С. 180—181.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання задачі про утилізацію радіонуклідів в шарі ґрунту / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тез. доп. Міжн. конф. ім. акад. М. Кравчука. — Київ, 2006. — С. 57.
4. Буряк Я. Й. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі / Я. Й. Буряк, Э. Я. Чапля // Доп. НАН України. — 1993, № 10. — С. 59—63.
5. Глушак П. А. До проблем математичного моделювання міграції радіонуклідів у ґрунтах та ґрунтових водах / П. А. Глушак, М. В. Токарчук, І. М. Кріп // Вісник ін-ту фізики конденсованих систем, 2006. — С. 56—62.
6. Ляшко С. И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / С. И. Ляшко. — К. : Наук. думка, 1998. — 256 с.
7. Власюк А. П. Автоматизована система триангулювання многозв'язних та складених областей / А. П. Власюк, М. С. Філатов // Тез. доп. Міжнародної школи-семинару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». — 2004. — С. 221—222.

The mathematical model of the multilayered soil regions cleaning from radionuclides with help of filters through the method of differential operator Taylor series was built.

**Key words:** *mathematical model, soil cleaning, radionuclide, Taylor series.*

Отримано: 14.06.2010